Cours et **exercices d'applications et de réflexions sur les espaces vectoriels**

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC Sciences maths

Espaces vectoriels

1) loi de composition externe

1-1)Définition: Soit E et A deux ensembles non vides. Toute application :

$f : A \times E \to E$

$(\alpha; x) \mapsto f(\alpha; x)$ S'appelle Une loi de composition externe sur E a coefficients dans A

1-2)notations :

1)l'élément : $f(\alpha; x)$ dans E s'appelle la composée de α et x dans l'ordre par cette lois de composition externe f et on le note :

$\alpha.x$ ou αx au lieu de : $f(\alpha; x)$

2) on général en prend : $A = \mathbb{R}$ ou $A = \mathbb{C}$
Ou A un corps

1-3) Exemples de lois de compositions externes:

Exemples :

1)soit $M_2(\mathbb{R})$;Pour tout matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ on pose : $\alpha.M = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$

on définit une lois de compositions externes sur $M_2(\mathbb{R})$ **:** $(M_2(\mathbb{R});.)$

2) soit V_3 ;Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ on a :

$\alpha.\vec{u} \in V_3$ on définit une lois de compositions externes sur V_3 **:** $(V_3;.)$

3) l'ensemble des polynômes de degrés inferieur a un entier naturel n se note : $\mathbb{R}_n[X]$

Pour tout polynôme P de degré inferieur a n et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ on a : $\alpha.P \in \mathbb{R}_n[X]$

on définit une lois de compositions externes sur $\mathbb{R}_n[X]$ **:** ∀x ∈ ℝ, (α P)(x) = $\alpha \times$P(x)

4)Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonction de I dans $\mathbb{R}$

Se note : $F(I;\mathbb{R}) = \left\{ \begin{matrix} f : I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{matrix} \right\}$

$\forall f \in F(I;\mathbb{R})$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ on définit l'applications

$\alpha.f$ définie par: ∀x ∈ I , ($\alpha.f$)(x) = $\alpha \times$ f(x).

Donc on définit ainsi une loi de composition externes sur $F(I;\mathbb{R})$

2) espace vectoriel

2-1)Définition : Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$ et une loi de composition externe a coefficients dans $\mathbb{R}$:

$. : \mathbb{R} \times E \to E$

$(\alpha; x) \mapsto \alpha.x$

Ont dit que $(E;*;.)$ est un espace vectoriel Sur $\mathbb{R}$ ou espace vectoriel reel si les lois vérifient les propriétés suivantes :

(1) $(E;*)$ est un groupe commutatif

(2) $\forall(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in E \quad (\alpha+\beta)x = \alpha x * \beta x$

(3) $\forall(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in E \quad (\alpha \times \beta)x = \alpha(\beta x)$

(4) $\forall(x;y) \in E^2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha(x*y) = \alpha x * \alpha y$

(5) $\forall x \in E \quad 1x = x$

On appelle les éléments de E des vecteurs on les notes $\vec{x}$ ou simplement x
les éléments de $\mathbb{R}$ seront appelés des scalaires.

pour $(E;*)$ l'lément neutre on le note : $\vec{0}$ ou

0_E ou simplement 0

2-2)exemples d'espaces vectoriels:

Dans tous les exemples qui suivent, la vérification des axiomes se fait simplement et est laissée au soin des étudiants.
Seules seront indiquées, dans chaque cas, les valeurs de l'élément neutre de la loi interne et du symétrique d'unélément

2-2-1)Exemples :

Exemple1 : (L'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
L'ensemble des fonctions f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est noté

$F(\mathbb{R};\mathbb{R})$:nous le munissons d'une structure de

d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

• <u>Loi interne :</u> Soient f et g deux éléments de

$F(\mathbb{R};\mathbb{R})$ La fonction f + g est définie par :

∀x ∈ $\mathbb{R}$ (f + g)(x) = f (x) + g(x)

(où le signe + désigne la loi interne de $F(\mathbb{R};\mathbb{R})$ dans

le membre de gauche et l'addition dans $\mathbb{R}$ dans le membrede droite).

• <u>Loi externe :</u> Si λ est un nombre réel et f une

fonction de $F(\mathbb{R};\mathbb{R})$ la fonction λ · f est définie par

l'image de tout réel x comme suit :
∀x ∈ $\mathbb{R}$ (λ · f)(x) = λ × f (x).

(Nous désignons par · la loi externe de $F(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et

par × la multiplication dans $\mathbb{R}$. Avec l'habitude on oubliera les signes de multiplication :
(λf)(x) = λf (x).)

• <u>Élément neutre</u> : L'élément neutre pour l'addition est la fonction nulle, définie par :

∀x ∈ $\mathbb{R}$ f (x) = 0. On peut noter cette fonction $0_{F(\mathbb{R};\mathbb{R})}$

• <u>Symétrique :</u> Le symétrique de l'élément f de

$F(\mathbb{R};\mathbb{R})$ est l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie

par :∀x ∈ $\mathbb{R}$: g(x) = −f (x).
Le symétrique de f est noté −f .

$(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel

Sur $\mathbb{R}$ car il vérifie tous les axiomes

Exemple2 : (Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$).E = $\mathbb{R}^2$

Un élément u ∈ $\mathbb{R}^2$ est donc un couple (x, y)

avec x élément de $\mathbb{R}$ et y élément de $\mathbb{R}$.

Ceci s'écrit : $\mathbb{R}^2 = \{(x;y)/x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}\}$

• Définition de la loi interne. Si $(x;y)$ et $(x';y')$

sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$, alors :

$(x;y)+(x';y')=(x+x';y+y')$

• Définition de la loi externe. Si λ est un réel et (x, y) est un élément de $\mathbb{R}^2$, alors :λ ·(x, y) = (λx,λy).
L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul (0,0). Le symétrique de (x, y) est (−x,−y)
que l'on note aussi−(x, y).

$(\mathbb{R}^2;+;.)$ est un espace vectoriel

Sur $\mathbb{R}$ car il vérifie tous les axiomes

Exemple3 : (L'espace vectoriel des polynômes de degrés inferieur a un entier naturel n se note :

$\mathbb{R}_n[X]$).

nous le munissons d'une structure de
d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

• <u>Loi interne :</u> Soient P et Q deux polynômes
Le polynôme P+ Q est définie par :
∀x ∈ $\mathbb{R}$ (P + Q)(x) = P (x) + Q(x)

(où le signe + désigne la loi interne de $\mathbb{R}_n[X]$ dans

le membre de gauche et l'addition dans $\mathbb{R}$ dans le membre de droite).

• <u>Loi externe :</u> Si λ est un nombre réel et P un

polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$

Le polynôme λ · Pest définie par l'image de tout réel x comme suit :
∀x ∈ $\mathbb{R}$ (λ · P)(x) = λ × P(x).

(Nous désignons par · la loi externe de $\mathbb{R}_n[X]$ et

par × la multiplication dans $\mathbb{R}$: (λP)(x) = λP (x).)

• <u>Élément neutre</u> : L'élément neutre pour l'addition est Le polynôme nulle, définie par :

∀x ∈ $\mathbb{R}$ P (x) = 0. On peut noter cette fonction $0_{\mathbb{R}_n[X]}$

• Symétrique : Le symétrique du polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ est Le polynôme définie par :

∀x ∈ $\mathbb{R}$: Q(x) = −P(x).
Le symétrique de P est noté −P.

$(\mathbb{R}_n[X];+;.)$ est un espace vectoriel

Sur $\mathbb{R}$ car il vérifie tous les axiomes

Exemple4 : (Les matrices).
L'ensemble des matrices carrées d'ordre3
On le note :

$$M_3(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} / (a;b;c;d;f;g;h;i)\in\mathbb{R}^9\right\}$$

(R) des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans R est muni d'une structure de R-espace vectoriel.
La loi interne : est l'addition de deux matrices

A et B dans $M_3(\mathbb{R})$ est définie par:

$$A+B=\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+a' & d+d' & g+g' \\ b+b' & e+e' & h+h' \\ c+c' & f+f' & i+i' \end{pmatrix}$$

La loi externe :est la multiplication d'une matrice par un scalaire.

$$\lambda\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda d & \lambda g \\ \lambda b & \lambda e & \lambda h \\ \lambda c & \lambda f & \lambda i \end{pmatrix}$$

L'élément neutre pour la loi interne est la matrice nulle (tous les coefficients sont nuls)
Le symétrique de

la matrice A est la matrice $-A=\begin{pmatrix} -a & -d & -g \\ -b & -e & -h \\ -c & -f & -i \end{pmatrix}$.

$(M_3(\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel

Sur $\mathbb{R}$ car il vérifie tous les axiomes

De même : $(M_3(\mathbb{R});+;.)$ est un espace

vectoriel sur $\mathbb{R}$

Exemple5 : on muni $\mathbb{R}^2$ des deux lois suivantes :

• Définition de la loi interne. Si $(x;y)$et $(x';y')$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$, alors :

$(x;y)+(x';y')=(x+x';y+y')$

• Définition de la loi externe. Si λ est un réel et (x, y) est un élément de $\mathbb{R}^2$, alors :λ ·(x, y) = (0,λy).

Est-ce que $(\mathbb{R}^2;+;.)$ est un espace vectoriel

Sur $\mathbb{R}$?

Non $(\mathbb{R}^2;+;.)$ n'est pas un espace vectoriel

car il ne vérifie pas par exemple l'axiome

suivante : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\ 1(x;y)=(x;y)$

en effet : $1(1;1)=(0;1)\neq(1;1)$

2-2-2)Autre Exemples :
L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,... sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$
Sur $\mathbb{R}$
3. C est un R-espace vectoriel : addition z + z
0 de deux nombres complexes, multiplication λz par un scalaire λ ∈ R.
L'élément neutre est le nombre complexe 0 et le symétrique du nombre complexe z est −z.

2-2-3) Autre Définition :

notations : On appelle les éléments de E des vecteurs on les notes $\vec{x}$ ou simplement x
les éléments de $\mathbb{R}$ seront appelés des scalaires.

pour $(E;*)$ l'lément neutre on le note : $\vec{0}$ ou

0_E ou simplement 0

Définition2:

$(E;+;.)$ est un espace vectoriel

Sur $\mathbb{R}$ ou espace vectoriel reel si les lois vérifient les propriétés suivantes :

(1) $(E;+)$ est un groupe commutatif

$(2)\ \forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\ \ \forall\vec{x}\in E\ \ (\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$

$(3)\ \forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\ \ \forall\vec{x}\in E\ \ (\alpha\times\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x})$

$(4)\ \forall(\vec{x};\vec{y})\in E^2\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}\ \ \alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$

$(5)\ \forall\vec{x}\in E\ \ 1\vec{x}=\vec{x}$

3) Régles de calculs dans un espace vectoriel

Proposition : Soit $(E;+;.)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. $\forall(\vec{x};\vec{y})\in E^2$ et $\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ on a :

1) $0\vec{x}=\vec{0}$ 2) $\alpha\vec{0}=\vec{0}$

3) $-1\vec{x}=-\vec{x}$ 4) $(-\alpha)\vec{x}=\alpha(-\vec{x})=-(\alpha\vec{x})$

5) $\alpha(\vec{x}-\vec{y})=\alpha\vec{x}-\alpha\vec{y}$ 6) $(\alpha-\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}-\beta\vec{x}$

7) $\alpha\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{0}$ ou $\alpha=0$

L'opération qui à $(\vec{x};\vec{y})$ associe $\vec{x}-\vec{y}$ s'appelle la soustraction. Le vecteur $\vec{x}+(-\vec{y})$ est noté $\vec{x}-\vec{y}$.

Démonstration : Les démonstrations des propriétés sont des manipulations sur les axiomes définissant les espaces vectoriels.

1). • on a l'égalité dans $\mathbb{R}$: 0 + 0 = 0.

• D'où, pour tout vecteur de E on a l'égalité : $(0 + 0)\cdot\vec{x} = 0\cdot\vec{x}$.

• Donc, en utilisant la distributivité de la loi externe par rapport à la loi interne et la définition de l'élément neutre, on obtient $0\cdot\vec{x} + 0\cdot\vec{x} = 0\cdot\vec{x}$.

On peut rajouter l'élément neutre dans le terme de droite, pour obtenir : $0\cdot\vec{x} + 0\cdot\vec{x} = 0\cdot\vec{x} + \vec{0}$

• En ajoutant $-(0\cdot\vec{x})$ de chaque côté de l'égalité, on obtient : $0\cdot\vec{x} = \vec{0}$

2) La preuve est semblable en partant de l'égalité $\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

3)Montrer $(-1)\cdot\vec{x} = -\vec{x}$ signifie exactement que $(-1)\cdot\vec{x}$ est le symétrique de $\vec{x}$, c'est-à-dire vérifie $\vec{x} + (-1)\cdot\vec{x} = \vec{0}$

En effet : $\vec{x} + (-1)\cdot\vec{x} = 1\cdot\vec{x} + (-1)\cdot\vec{x}$

$= (1 + (-1))\cdot\vec{x} = 0\cdot\vec{x} = \vec{0}$

4)5)6) a démontrer en exercices

7) $\alpha\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{0}$ ou $\alpha=0$?

On sait déjà que si $\alpha=0$ ou $\vec{x}=\vec{0}$ alors les propriétés précédentes impliquent $\alpha\vec{x}=\vec{0}$.

Pour la réciproque, soient $\alpha\in\mathbb{R}$ un scalaire et $\vec{x}\in E$ un vecteur tels que $\alpha\vec{x}=\vec{0}$

Supposons $\alpha\neq0$. On doit alors montrer que $\vec{x}=\vec{0}$

• Comme $\alpha\neq0$, alors α est inversible pour le produit dans le corps $\mathbb{R}$. Soit α^{-1} son inverse.

• En multipliant par α^{-1} les deux membres de l'égalité $\alpha\vec{x}=\vec{0}$, il vient : $\alpha^{-1}\cdot(\alpha\vec{x}) = \alpha^{-1}\cdot\vec{0}$.

• D'où en utilisant les propriétés de la multiplication par un scalaire $1\vec{x} = \vec{0}$ d'où $\vec{x} = \vec{0}$

Exercice1 : Justifier si les objets suivants sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

(a) L'ensemble des fonctions réelles sur [0, 1], continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.

(b) L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ pour les mêmes opérations.

(c) L'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ telles que : f (3) = 7.

Exercice2 : dans l'espace vectoriel $(V_2;+;.)$ déterminer le scalaire α et le vecteur $\vec{u}$ tel que : $(3\alpha^2-5\alpha+2)\vec{u}=\vec{0}$

Solutions : on utilisant les Régles de calculs dans un espace vectoriel on a donc :

$(3\alpha^2-5\alpha+2)\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$ ou $3\alpha^2-5\alpha+2=0$

$\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$ ou $\alpha=\frac{2}{3}$ ou $\alpha=1$

Donc l'ensembles des solutions est :

$$S=\left\{\left\{1;\frac{2}{3}\right\}\times V_2\cup\left(\mathbb{R}\times\left\{\vec{0}\right\}\right)\right\}$$

4) Sous-espace vectoriel

4-1)Définition: Soit (E,+,.) un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et F un sous-ensemble de E.

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si (F,+,.) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (donc pour les mêmes lois que celles de E, ou plus précisément pour les lois induites dans F par celles de E).

Remarque: Il est vite fatiguant de vérifier les 8 axiomes qui font d'un ensemble un espace vectoriel. Heureusement, il existe une manière rapide et efficace de prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel : grâce à la notion de sous-espace vectoriel.

4-2)Théorème: (caractérisation d'un sous-espace vectoriel)

Soit (E,+,.) un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et F un ensemble. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si : • F est inclus dans E,

• F est non vide,

• F est stable par combinaison linéaire cad ::

$\forall$ (x,y) ∈ F^2, $\forall$ (λ,μ) ∈ $\mathbb{R}^2$, (λ.x + μ.y) ∈ F.

Démonstration :

$\Rightarrow$) Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est bien inclus dans E, il contient l'élément neutre pour l'addition (puisque (F,+) est un groupe), c'est-à-dire le vecteur nul, et F est non vide. Enfin, les lois + et . sont respectivement des lois de composition interne et externe, dont la stabilité de F par combinaison linéaire en découle.

$\Leftarrow$) Réciproquement, si F vérifie les conditions proposées, alors :

• la loi + est interne dans F : $\forall$ (x,y) ∈ F^2 , pour : λ = μ = 1, 1.x + 1.y = x + y ∈ F,

• la loi + étant associative et commutative dans E, elle le reste dans F,

• F contient 0, puisque, étant non vide : ∃ x ∈ F, et : 1.x – 1.x = 0 ∈ F,

• tout élément de F a son symétrique dans F car : $\forall$ x ∈ F, 0.0 + (-1).x = -x ∈ F,

• la loi . est une loi de composition externe dans F puisque : $\forall$ x ∈ F, $\forall$ λ ∈ K, 0.0 + λ.x = λ.x ∈ F,

• les quatre dernières propriétés étant vraies dans E, elles restent vraies dans F.

4-3)Exemples:

1)Soit (E,+,.) un -espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

$\{\vec{0}\}$ et E sont des sous -espaces vectoriels de E

2) $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degrés inferieur a un entier naturel n est un sous -espace vectoriel de l'espace vectoriel $F(\mathbb{R};\mathbb{R})$

3) $\mathbb{R}\times\{0\}$ est un sous -espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;.)$

4-4)autre exemples:

Exemple1: on considére l'ensemble :

$$F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=2x\}$$

Montrer que F est un sous -espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;.)$

Solution : a)on a $F\subset\mathbb{R}^2$

b)Et on a : $(0;0)\in F$ car : $0=2\times 0$ donc : $F\neq\varnothing$

c) soient $(x;y)$ et $(x';y')$ sont deux éléments de F

donc : $y=2x$ et $y'=2x'$

et $(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$ montrons que : $\lambda(x;y)+\mu(x';y')\in F$?

$$\lambda(x;y)+\mu(x';y')=(\lambda x;\lambda y)+(\mu x';\mu y')$$

$$\lambda(x;y)+\mu(x';y')=(\lambda x+\mu x';\lambda y+\mu y')$$

$$\lambda y+\mu y'=\lambda 2x+\mu 2x'=2(\lambda x+\mu x')$$

Donc : $\lambda(x;y)+\mu(x';y')\in F$

Donc : F est un sous -espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2;+;.)$

Exemple2: on considére l'ensemble :

$$F=\left\{\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} / (a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Montrer que $(F;+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Solution : on sait que $(M_2(\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Il suffit de montrer que : F est un sous -espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R});+;.)$

a) on a : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+0 & 0 \\ -0 & 0-0 \end{pmatrix}\in F$ donc : $F\neq\varnothing$

c) soient $M_1=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1-b_1\end{pmatrix}$ et $M_2=\begin{pmatrix} a_2+b_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2-b_2\end{pmatrix}$

deux éléments de F et $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ montrons que :

$\alpha M_1+\beta M_1\in F$?

$$\alpha M_1+\beta M_1=\alpha\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1-b_1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} a_2+b_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2-b_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha(a_1+b_1) & \alpha b_1 \\ -\alpha b_1 & \alpha(a_1-b_1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta(a_2+b)_2 & \beta b_2 \\ -\beta b_2 & \beta(a_2-b_2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha(a_1+b_1)+\beta(a_2+b)_2 & \alpha b_1+\beta b_2 \\ -(\alpha b_1+\beta b_2) & \alpha(a_1-b_1)+\beta(a_2-b_2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (\alpha a_1+\beta a_2)+(\alpha b_1+\beta b_2) & \alpha b_1+\beta b_2 \\ -(\alpha b_1+\beta b_2) & (\alpha a_1+\beta a_2)-(\alpha b_1+\beta b_2)\end{pmatrix}$$

On pose : $d=\alpha b_1+\beta b_2$ et $c=\alpha a_1+\beta a_2$

Donc : $\alpha M_1+\beta M_1=\begin{pmatrix} c+d & d \\ -d & c-d\end{pmatrix}\in F$

Donc : $(F;+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Exercice3 : on considére l'ensemble :

$$F=\left\{\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & 3a\end{pmatrix}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Montrer que $(F;+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Solution : on sait que $(M_2(\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Il suffit de montrer que : F est un sous -espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R});+;.)$

a) on a : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2\times 0 \\ 0 & 3\times 0\end{pmatrix}\in F$ donc : $F\neq\varnothing$

c) soient $M_1=\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & 3a\end{pmatrix}$ et $M_2=\begin{pmatrix} c & -2d \\ d & 3c\end{pmatrix}$

deux éléments de F et $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ montrons que :

$\alpha M_1+\beta M_2\in F$?

$$\alpha M_1+\beta M_1=\alpha\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & 3a\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} c & -2d \\ d & 3c\end{pmatrix}$$

$$\alpha M_1+\beta M_1=\begin{pmatrix} \alpha a & -2\alpha b \\ \alpha b & 3\alpha a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta c & -2\beta d \\ \beta d & 3\beta c\end{pmatrix}$$

$$\alpha M_1+\beta M_1=\begin{pmatrix} \alpha a+\beta c & -2(\alpha b+\beta d) \\ \alpha b+\beta d & 3(\alpha a+\beta c)\end{pmatrix}$$

On pose : $f=\alpha b+\beta d$ et $e=\alpha a+\beta c$

Donc : $\alpha M_1+\beta M_1=\begin{pmatrix} e & -2f \\ f & 3e\end{pmatrix}\in F$

Donc : $(F;+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

5) combinaison linéaire

5-1) Définition :

Soit (E,+,.) un -espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Soit une famille de n vecteurs : $\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$ de E.

Une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille est un vecteur $\vec{x}$ de E qui s'écrit :

$\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$, où les α_i

sont des scalaires (réels) qui s'appelles les coefficients de la combinaison linéaire
ont dit aussi que vecteur $\vec{x}$ est engendré par la famille de vecteurs : $(x_i)_{1\le i\le n}$

5-2) Exemples

Exemple1: dans espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R});+;.)$

On considére les matrices : $M_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $M_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4\end{pmatrix}$

Est-ce que la matrice : $M=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8\end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des matrices : M_1 et M_2 ?

Solution : on cherche $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $M=\alpha M_1+\beta M_2$?

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ 0 & 4\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha+\beta \\ \alpha & 4\beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \\ \alpha+\beta = 5 \\ 4\beta = 8 \end{cases}$$

On a donc : $M = 3M_1 + 2M_2$

donc : M est une combinaison linéaire des matrices : M_1 et M_2

Exemple2: dans : $(\mathbb{R}^2;+;.)$ on considére les Vecteurs : $\vec{x}_1 = (1;-2)$ et $\vec{x}_2 = (5;1)$ et $\vec{x}_3 = (-7;2)$

Est-ce que le vecteur : $\vec{x}_3$ est une combinaison linéaire des vecteurs : $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$?

Solution : on cherche $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\vec{x}_3 = \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2$?

$$\vec{x}_3 = \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 \Leftrightarrow (-7;2) = \alpha(1;-2) + \beta(5;1)$$

$$\Leftrightarrow (-7;2) = (\alpha;-2\alpha) + (5\beta;\beta)$$

$$\Leftrightarrow (-7;2) = (\alpha+5\beta;-2\alpha+\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+5\beta = -7 \\ -2\alpha+\beta = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+10\beta = -14 \\ -2\alpha+\beta = 2 \end{cases} \Rightarrow 11\beta = -12 \Rightarrow \beta = -\frac{12}{11} \text{ et } \alpha = \frac{-17}{11}$$

On a donc : $\vec{x}_3 = \frac{5}{11}\vec{x}_1 - \frac{17}{11}\vec{x}_2$

donc : $\vec{x}_3$ est une combinaison linéaire des vecteurs : $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$

b) Dans le l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3;+;.)$

(3, 3, 1) est combinaison linéaire des vecteurs (1, 1, 0) et (1, 1, 1) car on a l'égalité (3, 3, 1) = 2(1, 1, 0) + 1(1, 1, 1).

c) dans : $(\mathbb{R}^2;+;.)$: le vecteur $\vec{x}$ = (2,1) n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{y}$ = (1,1) car s'il l'était, il existerait un réel λ tel que $\vec{x} = \lambda\vec{y}$

ce qui équivaudrait à l'égalité (2, 1) = (λ,λ). faux

Exemple3: dans $(\mathbb{R}_n[X];+;.)$ l' espace vectoriel des polynômes de degrés inferieur a 2

on considére les polynômes : $P_1(x) = x^2 - x$;

$P_2(x) = 1 + x^2 + x$ et $P_3(x) = 8 - x^2$

Est-ce que le polynôme : $P(x) = -2x^2 - 2x + 15$ est une combinaison linéaire des polynômes : $P_1(x)$ et $P_2(x)$ et $P_3(x)$?

Solution : on peut remarquer que :

$$P(x) = 1\times P_1(x) - 1\times P_2(x) + 2\times P_3(x)$$

donc : le polynôme : $P(x)$ est une combinaison linéaire des polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$ et $P_3(x)$

Exemple4: Soit E = $F(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles. Soient f_0, f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies par :$\forall x \in \mathbb{R}$ $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$ .Alors la fonction f définie par :
$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$
est combinaison linéaire des fonctions f_0, f_1, f_2, f_3 puisque l'on a l'égalité : $f = f_3 - 2f_2 - 7f_1 - 4f_0$

Exercice4: dans espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R});+;.)$

On considére la famille :

$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)$ et on considére la matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$

Montrer que la matrice M est engendré par la famille B

Solution : on cherche $(a;b;c) \in \mathbb{R}^2$ tel :

$M = a\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$

On a donc : $\begin{pmatrix}a+2b & b+c\\2c & -a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\10 & -4\end{pmatrix}$

Donc : $M = 3\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$

donc : M est engendré par la famille B

6) espace vectoriel engendré par une famille

E étant un espace vectoriel réel

Soit B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) une famille de vecteurs de E. Ont dit que la famille B engendre E ssi

$\forall \vec{x}\in E\ \ \exists(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ Tel que :

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$$

Exemple: dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^2;+;.)$

on considére les vecteurs : $\vec{x}_1=(3;2)$ et $\vec{x}_2=(1;5)$

et la familleB=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2$)

Montrer que la famille B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2$) engendre

l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$

Solution : Montrrons que $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^2$

$\exists(\alpha_1;\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$ Tel que : $\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2$

On pose : $\vec{x}=(a;b)$

$\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2\Leftrightarrow(a;b)=\alpha_1(3;2)+\alpha_2(1;5)$

$\Leftrightarrow(a;b)=(3\alpha_1;2\alpha_1)+(\alpha_2;5\alpha_2)$

$\Leftrightarrow(a;b)=(3\alpha_1+\alpha_2;2\alpha_1+5\alpha_2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\alpha_1+\alpha_2\\b=2\alpha_1+5\alpha_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{1}{13}(5a-b)\\\alpha_2=\dfrac{1}{13}(-2a+3b)\end{cases}$$

donc :famille B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2$) engendre l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$

7)Sous-espace engendré par une famille

Théorème : (Théorème de structure de l'ensemble des combinaisons linéaires).

Soit $\{\vec{x}_1\ ;\ \vec{x}_2;...;\vec{x}_n\}$ un ensemble fini de vecteurs d'un K-espace vectoriel E. Alors :

- L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{\vec{x}_1\ ;\ \vec{x}_2;...;\vec{x}_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
- C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $\{\vec{x}_1\ ;\ \vec{x}_2;...;\vec{x}_n\}$

Notation. Ce sous-espace vectoriel est appelé sous-espace engendré par $\{\vec{x}_1\ ;\ \vec{x}_2;...;\vec{x}_n\}$ et est noté Vect($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$). On a donc :

$\vec{x}$ ∈ Vect ($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) $\Longleftrightarrow$ il existe $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{R}$

tels que : $\vec{x}=\lambda_1\vec{x}_1+\cdots+\lambda_n\vec{x}_n$

Remarque.

a) Dire que Vect($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$). est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$. signifie que si

F est un sous-espace vectoriel de E contenant aussi les vecteurs $\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$ alors :

Vect($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$). ⊂ F.

b) Plus généralement, on peut définir le sous-espace vectoriel engendré par une partie V quelconque (non nécessairement finie) d'un espace vectoriel : VectV est le plus petit sous-espace vectoriel contenant V .

c) E étant un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et $\vec{x}_1$ un élément quelconque de E l'ensemble Vect($\vec{x}_1$) = {λ$\vec{x}_1$ | λ ∈ℝ } est le sous-espace vectoriel de E engendré par $\vec{x}_1$. Il est souvent noté ℝ $\vec{x}_1$. Si $\vec{x}_1$ n'est pas le vecteur nul, on parle d'une droite vectorielle.

Exercice5. On munit $\mathbb{R}^3$ des opérations usuelles.
Soients F_1 = {(λ, λ, λ), λ ∈ ℝ },
F_2 ={ (λ − 3μ, 2μ, λ + μ), (λ, μ) ∈ $\mathbb{R}^2$}
F_3 ={ (x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$/ x − y + z = 0} et
F_4 ={ (x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$/ x + 2y + 3z = 0 et 2x + 5y + z = 0}
Montrer que F_1, F_2, F_3 et F_4 sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ et en fournir dans chaque cas une famille génératrice.

Solution.

• F1 = {(λ, λ, λ), λ ∈ ℝ } = {λ(1, 1, 1), λ ∈ ℝ } = Vect($\vec{x}_1$) où $\vec{x}_1$ = (1, 1, 1). F_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et une famille génératrice de F_1 est ($\vec{x}_1$).

• F_2 ={ (λ − 3μ, 2μ, λ + μ), (λ, μ) ∈ $\mathbb{R}^2$}
={λ(1, 0, 1) + μ(−3, 2, 1), (λ, μ) ∈ $\mathbb{R}^2$}
= Vect($\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$) où $\vec{x}_1$ = (1, 0, 1) et $\vec{x}_1$ =(−3, 2, 1).

F_2 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et une famille génératrice de F_2 est $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$)

• Soit (x, y, z) ∈ $\mathbb{R}^3$
. x − y + z = 0 ⇔ z = −x + y.
Donc, F_3 ={ (x, y, −x + y), (x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$}
={x(1, 0, −1) + y(0, 1, 1), (x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$}
= Vect($\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$) où $\vec{x}_1$ = (1, 0, −1) et $\vec{x}_2$ =(0, 1, 1).

F_3 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et une famille génératrice de F_3 est ($\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$).

• Soit (x, y, z) ∈ R^3
.x + 2y + 3z = 0 et 2x + 5y + z = 0
⇔x = −2y − 3z et 2(−2y − 3z) + 5y + z = 0
⇔y = 5z et x = −13z .
Donc, F_4 = {(−13z, 5z, z), z ∈ ℝ }
={z(−13, 5, 1), z ∈ ℝ } = Vect($\vec{x}$) où $\vec{x}$ = (−13, 5, 1). F_4 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et une famille génératrice de F_4 est ($\vec{x}$).

7)Familles libres ; Familles libres

Définition : Soient (E, +, .) un ℝ -espace vectoriel. Soient n un entier naturel non nul

La famille B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) $\in E^n$ est liée (ou encore les vecteurs $\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$ sont linéairement dépendants) si et seulement si

$\exists(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)\in\mathbb{R}^n / \vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n=\vec{0}$ et

$(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)\neq(0;0;...;0)$

Une relation du type : $\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n=\vec{0}$ avec $(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)\neq(0;0;...;0)$ s'appelle une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs $\vec{x}_i$ .et La famille B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) est libre (ou encore les vecteurs $\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$ sont linéairement indépendants) si et seulement

si $\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n=\vec{0} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$.

Remarque : La famille B est dite liée si et seulement si elle n'est pas libre.

Théorème: caractérisation des familles liées
Soit (E,+,.) un ℝ -espace vectoriel et B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) $\in E^n$ une famille de vecteurs de E.

La famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs de cette famille peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Démonstration :

• Si la famille est liée, il existe une combinaison linéaire faisant intervenir un nombre fini de vecteurs de
la famille, nulle et à coefficients non tous nuls, soit :

∃ (λ_1, . . . , λ_n) $\in\mathbb{R}^n$, λ_1. $\vec{x}_1$ + λ_2. $\vec{x}_2$ . . . + λ_n. $\vec{x}_n$ = 0.

Puisque l'un des coefficient est non nul, on peut supposer que c'est λ_1 et alors :

$\vec{x}_1$ = -. λ_2 / λ_1 $\vec{x}_2$ -….-. λ_n/ λ_1 $\vec{x}_n$ et on a bien un des vecteurs de la famille s'écrivant comme combinaison linéaire des autres.

• Si maintenant, l'un d'entre eux s'écrit comme combinaison linéaire des autres, par exemple :

$\vec{x}_1$ = µ2. $\vec{x}_2$ + … + µn. $\vec{x}_n$, alors :

1. $\vec{x}_1$ – µ2. $\vec{x}_2$ – … – µn. $\vec{x}_n$ = 0.

On vient bien d'obtenir une combinaison linéaire des vecteurs de la famille, nulle et à coefficients non tous nuls (à cause du coefficient 1).

Exemple: dans l'espace vectoriel réel $\left(\mathbb{R}^3;+;.\right)$ on considére la famille :

$B=\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$tel que : $\vec{u}=\left(\cos a;\cos b;\cos c\right)$

$\vec{v}=\left(\sin a;\sin b;\sin c\right)$ et

$\vec{w}=\left(\sin\left(x+a\right);\sin\left(x+b\right);\sin\left(x+c\right)\right)$

Avec ; $\left(a;b;c\right)\in\mathbb{R}^3$

Montrer que la famille B est liée

Solution.

On a : $\sin\left(x+a\right)=\sin x\cos a+\cos x\sin a$

$$\sin\left(x+b\right)=\sin x\cos b+\cos x\sin b$$

$$\sin\left(x+c\right)=\sin x\cos c+\cos x\sin c$$

Donc :

$\vec{w}=\sin x\left(\cos a;\cos b;\cos c\right)+\cos x\left(\sin a;\sin b;\sin c\right)$

Donc : $\vec{w}=\sin x\vec{u}+\cos x\vec{v}$ et puisque :

$\left(\sin x;\cos x\right)\neq\left(0;0\right)$ alors la famille B est liée

Théorème:

1)Si une famille comporte le vecteur nul ou deux fois le même vecteur, la famille est liée.

2)Si une famille B est liée alors toute famille qui contient la famille B est une famille liée.

3) Si une famille B est libre alors toute partie de cette famille est une famille libre.

4) Si une famille B est libre alors les vecteurs de cette famille sont non nuls

Démonstration :de 1) par exemple

• Si la famille comporte le vecteur nul : $\vec{x}_1 = \vec{0}$, par exemple, alors : 1. $\vec{x}_1 = \vec{0}$, soit une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls de vecteurs de la famille : la famille est liée.

• Si la famille comporte deux fois le même vecteur, par exemple : $\vec{x}_1 = \vec{x}_k$, avec : k ≠ 1, alors on a à nouveau une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls de vecteurs de la famille

avec : 1. $\vec{x}_1$ – 1. $\vec{x}_k$ = $\vec{0}$.

8) base d'un espace vectoriel

Définition 1 : Soit (E,+,.) un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) une famille de vecteurs de E

Si et seulement si tout élement de E s'exprime de facon unique sous forme d'une combinaison lineaire des élément de B

Cad $\forall\vec{x}\in E\ \ \exists!\left(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n\right)\in\mathbb{R}^n$ Tel que :

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$$

Le :$\left(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n\right)$ s'appelle les coordonnées de $\vec{x}\in E$ dans la base B et on écrit :

$\vec{x}=\left(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n\right)_{(B)}$ ou $\vec{x}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\....\\\alpha_n\end{pmatrix}$

Exemple: dans l'espace vectoriel réel $\left(\mathbb{R}^3;+;.\right)$

Soit $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$ donc : $\vec{x}=\left(a;b;c\right)$

$\vec{x}=\left(a;b;c\right)=a\left(1;0;0\right)+b\left(0;1;0\right)+c\left(0;0;1\right)$

On pose : $\vec{e}_1=\left(1;0;0\right)$et $\vec{e}_2=\left(0;1;0\right)$ et $\vec{e}_3=\left(0;0;1\right)$

On a donc : $\vec{x}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3$

$\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^3\ \exists!\left(a;b;c\right)\in\mathbb{R}^3$ Tel que : $\vec{x}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2+c\vec{e}_3$

Donc : $B=\left(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3\right)$est une base de $\left(\mathbb{R}^3;+;.\right)$

Théorème: Soit (E,+,.) un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) une base de E et $\lambda\in\mathbb{R}$

1)si $(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)$ sont les coordonnées de $\vec{x}\in E$

et $(\beta_1;\beta_2;...;\beta_n)$ sont les coordonnées de $\vec{y}\in E$

dans la base B alors : $(\alpha_1+\beta_1;\alpha_2+\beta_2;...;\alpha_n+\beta_n)$

sont les coordonnées de $\vec{x}+\vec{y}$ dans la base B

et $(\lambda\alpha_1;\lambda\alpha_2;...;\lambda\alpha_n)$ sont les coordonnées de $\lambda\vec{x}$

dans la base B

2) B est une base de E si et seulement si c'est une famille libre et génératrice de E.

Exemple : On munit $\mathbb{R}^3$ des opérations usuelles.

Soit : $E=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / x-y+3z=0\}$

Montrons que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Et donner une famille génératrice de E et une base de E

Solutions : Il suffit de montrer que est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

a) $E\neq\varnothing$ car : $(0;0;0)\in E$ en effet : $0-0+3\times0=0$

b)soient : $\vec{u}=(a;b;c)\in E$ et $\vec{v}=(x;y;z)\in E$

et $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=(\alpha a;\alpha b;\alpha c)+(\beta x;\beta y;\beta z)$

$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=(\alpha a+\beta x;\alpha b+\beta y;\alpha c+\beta z)$

$(\alpha a+\beta x)-(\alpha b+\beta y)+3(\alpha c+\beta z)=$

$=(\alpha a-\alpha b+3\alpha c)+(\beta x-\beta y+3\beta z)$

$\vec{u}=(a;b;c)\in E\Leftrightarrow a-b+3c=0$

Donc : $\alpha a-\alpha b+3\alpha c=0$

De même : $\vec{v}=(x;y;z)\in E\Leftrightarrow x-y+3z=0$

Donc : $\beta x-\beta y+3\beta z=0$

Donc : $(\alpha a+\beta x)-(\alpha b+\beta y)+3(\alpha c+\beta z)=0$

Donc : $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\in E$

Donc : E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

2) $(x;y;z)\in E\Leftrightarrow x-y+3z=0$

Soit : $\vec{u}=(a;b;c)\in E\Leftrightarrow a-b+3c=0\Leftrightarrow a+3c=b$

$\vec{u}=(a;b;c)=(a;a+3c;c)=a(1;1;0)+c(0;3;1)$

Donc :

$\vec{u}=(a;b;c)=(a;a+3c;c)=a(1;1;0)+c(0;3;1)$

On pose : $\vec{e}_1=(1;1;0)$et $\vec{e}_2=(0;1;0)$ et $\vec{e}_3=(0;3;1)$

On a donc : $\vec{u}=a\vec{e}_1+c\vec{e}_2$

Donc : $B=(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$est une famille génératrice de E

Montrons que $B=(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une famille libre ?

Soient : $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ Tel que

$\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2=\vec{0}\Leftrightarrow(\alpha;\alpha+3\beta;\beta)=(0;0;0)$

$\Leftrightarrow\alpha=0$ ou $\alpha+3\beta=0$ ou $\beta=0$

$\Leftrightarrow\alpha=0$ ou $\beta=0$

Donc : $B=(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une famille libre

Donc : $B=(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une base de E

9) dimension d'un espace vectoriel reel

Définition : Soit (E,+,.) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si E admet une base comportant un nombre fini de n vecteurs $(n\in\mathbb{N}^*)$, on appelle dimension de E le nombre n qui est donc le même pour toutes les bases de E et on écrit : $\dim E=n$

Exemples: 1)dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^2;+;.)$ on a : $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$:

$(x;y)=x(1;0)+y(0;1)$

On pose : $\vec{e}_1=(1;0)$et $\vec{e}_2=(0;1)$

$B=(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ qui s'appelle la base canonique de $\mathbb{R}^2$ donc : $\dim\mathbb{R}^2=2$

2)dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^3;+;.)$ on a :

$\forall(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$: $(x;y;z)=x(1;0;0)+y(0;1;0)+z(0;0;1)$

On pose : $\vec{e}_1=(1;0;0)$ et $\vec{e}_2=(0;1;0)$ et $\vec{e}_3=(0;0;1)$

$B=(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ qui s'appelle la base canonique de $\mathbb{R}^3$ donc : $\dim\mathbb{R}^3=3$

3) dans l'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R});+;.)$

Pour tout matrice $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose :

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ;\ A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B=(A_1;A_2;A_3;A_4)$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$ qui s'appelle la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ donc :

$\dim M_2(\mathbb{R})=4$

proprieté: Soit (E,+,.) un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

1) si $\dim E=2$ et R=$(\vec{i};\vec{j})$ une base de E

la famille $B=(\vec{u}_1;\vec{u}_2)$ est une base de E si et seulement si elle est libre .

Et Si : $\vec{u}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ et $\vec{u}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$

Et $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\neq 0$ alors $B=(\vec{u}_1;\vec{u}_2)$ est libre

2) si $\dim E=3$ et R=$(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de E

la famille $B=(\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$ est une base de E si et seulement si elle est libre .

Et Si : $\vec{u}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ et $\vec{u}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$

et $\vec{u}_3=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$

Et $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\neq 0$ alors $B=(\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$ est libre

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien